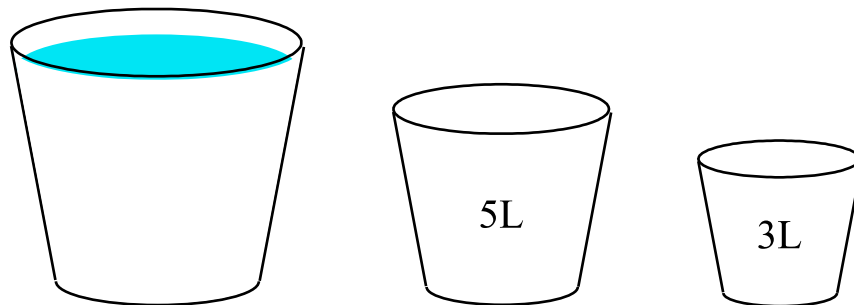


Le jeu des transvasements

Vous avez sûrement déjà vu ces énigmes où l'on vous donne un pot de a litres, un pot de b litres, et un grand pot contenant $a+b$ litres d'eau. Ces pots ne sont pas gradués mais leur contenance est certifiée. On vous demande alors de vous débrouiller pour isoler a' litres d'eau, en utilisant uniquement des transvasements d'un pot à l'autre. Le seul moyen d'être précis est de verser l'eau intégralement ou bien jusqu'à ras-bord. Il est aussi interdit de jeter de l'eau.

Exemple : $a=5$, $b=3$, $c=4$.

Dans le cas général, le problème a-t-il toujours une solution ?



La bouteille d'anis

Je déteste l'anis. Vraiment. Je déteste aussi gaspiller. On vient de me donner une ancienne bouteille d'essence d'anis. Sa contenance est d'1L. J'aimerais l'utiliser pour stocker de l'eau mais il y a un problème : la forme du goulot est telle qu'il est impossible de la vider complètement : quoi que je fasse, il reste toujours 1cl de liquide à l'intérieur. Je n'ai pas envie de passer ma bouteille au four ni d'introduire de chiffon ou quoi que ce soit à l'intérieur aussi ai-je entrepris de la rincer à l'eau claire. Mon objectif est d'obtenir une bouteille contenant 1L d'eau avec une concentration d'anis inférieure à 1 pour 10 milliards. C'est le seuil en dessous duquel le goût me devient supportable.

Alors j'ai pris ma bouteille, je l'ai remplie à ras bord, pour obtenir 1L d'anis à 1 pour 100.

Je l'ai vidée puis remplie à nouveau. J'ai donc obtenu 1L d'anis à 1 pour 10 000.

J'ai recommencé la manip trois fois, pour obtenir enfin de 1L d'anis à un pour 10^{10} .

Mais j'ai gâché 396cL d'eau.

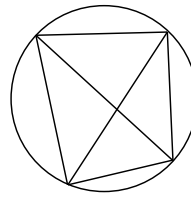
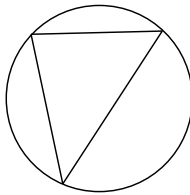
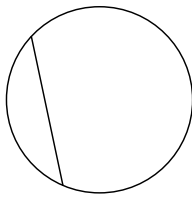
1. Trouvez comment en gâcher moins.
2. Essayez d'optimiser la méthode.

Dénombrement

On décide de diviser un disque en morceaux avec la procédure suivante :

Choisir sur son bord n points en position quelconque. Tracer tous les segments reliant ces points deux à deux. Couper le disque selon ces segments.

Par exemple :



La question est : combien de régions a-t-on ainsi découpées ?

L'épreuve

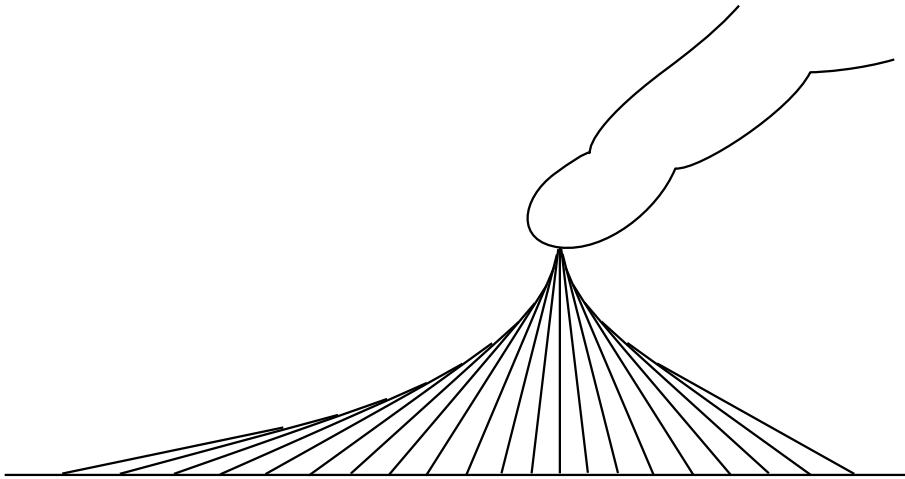
Dans un lointain royaume, le roi Pien a décidé que tout nouveau prisonnier aurait une possibilité d'être gracié. Il a imaginé le système suivant pour les mettre à l'épreuve.

Les cellules ne sont pas munies de portes. Le prisonnier a une chaîne attachée au bras gauche, l'autre bout de la chaîne n'étant au départ relié à rien. Il va lui-même enrouler le bout libre sa chaîne aux quatre barreaux de la fenêtre de sa cellule, de la façon qu'il veut, puis attacher le bout libre à son bras droit. Le gardien de la prison va ensuite venir vérifier que le prisonnier est bien attaché. S'il arrive à délivrer le prisonnier sans détacher la chaîne de ses bras, celui-ci sera condamné à mort. Sinon, le gardien va scier un des quatre barreaux. Si le prisonnier arrive alors à sortir de sa cellule, il est libre !

Comment le prisonnier va-t-il pouvoir s'y prendre pour gagner à coup sûr ?

La courbe du jeu de cartes

Quand on étale un jeu de cartes dans le sens puis que l'on retourne la carte du dessous, cela soulève les autres cartes et crée un pic que l'on peut facilement déplacer d'un doigt :



essayez de trouver la formule de la courbe approximativement tracée par le sommet de ces cartes.

Une nouvelle loi de composition

On connaît bien l'addition, la multiplication, et leurs inverses la soustraction et la division.

On propose une nouvelle loi de composition :

$$(x, y) \rightarrow \frac{x+y}{1-xy}$$

à vous de l'explorer.

Idées de questions :

- cette loi est-elle commutative ?
- associative ?
- y a-t-il un ou des éléments neutres ?
- des éléments périodiques ? c'est à dire des y qui composés suffisamment de fois de suite avec x redonnent x ?
- vous remarquerez que deux nombres rationnels (de la forme p/q) donnent un rationnel. Y a-t-il des nombres rationnels périodiques ?
- élargir à d'autres lois similaires. Par exemple, changer le moins en plus.